Demonstration of Relativistic Invariance in Quarkbase Cosmology

Carlos Omeñaca Prado

September 2025

1 Teorema de la invariancia operacional local del modelo Quarkbase bajo condiciones físicas razonables

Enunciado
Sea la acción total

$$S = -\int d^4x \left[\tfrac{1}{2}(\partial\Psi)^2 + V(\Psi) + \tfrac{1}{4}f(\Psi)F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}\right] + S_m\Big[\phi_i; g_m(\Psi)\Big] + S_{\rm qb}[x_i(\tau); m(\Psi)],$$

con $(F_{\mu\nu})$ el tensor EM, (S_m) la acción de materia (fermiones, enlaces atómicos, experimentos) y (f, g_m, m) funciones escalares de (Ψ). Supongamos:

1. **(A1) Acción Lorentz-invariante:** cada término está construido como integral de escalares de Lorentz (es verdad por construcción).
2. **(A2) Acoplo universal en el sector no-gravitatorio:** la dependencia de (Ψ) en los parámetros físicos que determinan "relojes y reglas" es la misma (o se reduce a un factor conformal común). Formalmente, existe una función positiva $C(\Psi)$ tal que las masas y constantes se pueden escribir como $(m_i(\Psi) = m_i^{(0)}, h(\Psi))$ y las constantes que fijan reacciones y tiempos son proporcionales a $(C(\Psi))$.
3. **(A3) Fondo local suave:** en la región experimental (laboratorio) el campo de fondo $(\Psi_0(x))$ varía muy poco en la escala del aparato: $(|\nabla\Psi_0|/\Psi_0 \ll \delta_{\rm exp}/L_{\rm app})$ (explicito más abajo).
4. **(A4) Entrainment físico:** el éter plasmático local se mueve con la materia experimental en la región (o su velocidad relativa es despreciable).

Entonces, los observadores locales que construyen medidas con la materia descrita por (S_m) obtendrán las mismas leyes físicas (medidas invariante operacionalmente) independientemente de su estado de movimiento (no detectarán violaciones de Lorentz en experimentos tipo MM, relojes atómicos, resonadores ópticos), siempre que las cotas cuantitativas que se derivan de (A3) se cumplan.

1.1 Prueba estructurada y matemática

1.1.1 Covarianza de la acción

Cada término de (S) es un integral de escalares construidos con $(\eta_{\mu\nu})$, (∂_μ), campos escalar/fermiónicos y tensores antisím como $(F_{\mu\nu})$. Por el teorema de construcción, la acción es invariante bajo SO(1, 3) (transformaciones de Lorentz lineales globales): $(x^\mu \mapsto \Lambda^\mu{}_\nu x^\nu)$. Por tanto las **ecuaciones de Euler–Lagrange** son formas covariantes (tensores) y transforman entre sí de forma consistente: es la **condición necesaria** de invariancia.

1.1.2 Medidas físicas y acoplo universal (conformal frame)

Queremos mostrar que los *observables* medidos por aparatos (hechos de la materia descrita por (S_m)) son independientes del marco. Si la materia acopla a (Ψ) de forma universal, existe una reescritura del Lagrangiano de materia usando una **métrica efectiva física** conformal a Minkowski:

Definimos

$$g^{\text{phys}}_{\mu\nu}(x) \equiv C(\Psi(x))\,\eta_{\mu\nu}.$$

(Esto es posible si la dependencia en (Ψ) de masas y constantes se factoriza en un único factor $(C(\Psi))$; en general, se puede exigir que los parámetros relevantes para medición se transformen así.)

Entonces la acción de materia se reescribe (hasta reescalados de campo) como la acción de materia mínimamente acoplada a $(g^{\text{phys}}_{\mu\nu})$. En ese "marco físico" los relojes y reglas (basados en transiciones atómicas, longitudes de bandas cristalinas, etc.) miden intervalos y frecuencias con la métrica (g^{phys}). Las transformaciones Lorentz locales de (g^{phys}) (en regiones suficientemente pequeñas) mantienen la forma de las ecuaciones de la física local: por tanto, los observables *dimensionless* (fracciones de frecuencias, ratios de longitudes) no dependen de la velocidad del laboratorio respecto a $(\eta_{\mu\nu})$ sino únicamente de (g^{phys}). Si $(C(\Psi))$ es suave, los relojes y reglas se ven reescalados todos del mismo modo → **operacionalmente no detectamos el éter**.

> Matemáticamente: si la acción de materia puede escribirse como $S_m[\phi; g^{\text{phys}}]$, las transformaciones locales que preservan (g^{phys}) (p. ej. transformaciones ortogonales locales en marcos locales) dejan invariables las relaciones ponderadas por la materia.

1.1.3 Propagación de ondas y condiciones de homogeneidad

La razón por la que Michelson–Morley y sus versiones modernas miden nulo es que las ecuaciones de onda para EM se reducen localmente (en WKB) a la condición de "cone of influence" dictada por $(g^{\text{phys}}_{\mu\nu})$. Si $(C(\Psi))$ cambia lentamente en la región del experimento, la ecuación de onda local se aproxima a

$$k_\mu k_\nu g^{\mu\nu}_{\text{phys}} \simeq 0.$$

Por tanto las velocidades de fase/grupo observadas con aparatos hechos de la materia son iguales en todas las direcciones y no muestran anisotropía detectable.

1.1.4 Entrainment elimina viento de éter

Si el campo (Ψ) tiene un 4-velocidad efectiva ($u^\mu(\Psi)$) casi coincidente con la 4-velocidad del aparato (entrainment), entonces la diferencia de velocidades relativas es nula y el aparato no experimenta un "wind". Esto completa la razón física por la que la MM da nulo: no hay velocidad relativa entre detector y el medio que determine una anisotropía.

1.1.5 Cotas cuantitativas

Si la hipótesis (A3) conlleva ($|\nabla\Psi_0|/\Psi_0 \ll \varepsilon$) con ε pequeño (relacionado con la sensibilidad experimental), entonces las correcciones a la relación de dispersión son de orden (ε) y no detectables..

Primera Conclusión: Bajo las hipótesis explicitadas (acción covariante, acoplo universal, fondo suave y entrainment), el modelo reproduce la *invariancia operacional* de la relatividad especial: observadores en marcos distintos obtendrán la misma física en los experimentos locales relevantes. Esto da un formalismo matemático cerrado.

2 Ejemplo explícito y cálculo de dispersión $f(\Psi) = 1 + \varepsilon\Psi$ (de primer orden)

2.1 Supuestos y normalización

- $f(\Psi) = 1 + \varepsilon\Psi$.
- Tomamos Ψ **adimensional** (elegimos esta convención por simplicidad).
- $|\varepsilon\Psi| \ll 1$ en la región experimental.
- El fondo es $\Psi(x) = \Psi_0 + \delta\Psi(x)$ con Ψ_0 aproximadamente constante a escala del experimento y $\delta\Psi$ variaciones pequeñas.
- Las unidades: trabajamos con $c = 1$ en fórmulas; cuando haga estimaciones numéricas reintroduciré c si hace falta.
- Sensibilidades experimentales de referencia: interferometría moderna MM-like tiene sensibilidad típica a anisotropías fraccionales de velocidad de la luz $\Delta c/c \sim 10^{-15}$ (o mejor en experimentos ópticos); relojes atómicos y comparaciones de frecuencias llegan a $\sim 10^{-17}$–10^{-18} o más en algunos casos.

2.2 Ecuaciones de Maxwell modificadas y eikonal WKB

La ecuación que surge de la acción con prefactor $f(\Psi)$ es

$$\partial_\mu\Big(f(\Psi)\,F^{\mu\nu}\Big) = 0,$$

en vacío (sin corrientes). Tomamos la aproximación WKB/geométrica para ondas electromagnéticas locales:

$$A_\mu(x) = a_\mu(x)\,e^{i\varphi(x)}$$

con 4-vector de fase $k_\mu = \partial_\mu\varphi$ grande comparado con las variaciones de amplitud.

Al ordenar por potencias de k (orden dominante k^2), la ecuación de eikonal da, a primer orden en ε y suponiendo gradientes suaves de Ψ,

$$f(\Psi)\, k_\mu k^\mu + i\left(\partial_\mu f(\Psi)\right) k^\mu + \mathcal{O}(\partial^2 f,\, k^0) = 0.$$

Desarrollando con $f(\Psi) = 1 + \varepsilon\Psi$ y separando términos reales (relación de dispersión) y términos imaginarios (atenuación y pequeñas correcciones de fase), obtenemos a primer orden:

$$k_\mu k^\mu \;=\; -\varepsilon\, \frac{k^\mu \partial_\mu \Psi}{1+\varepsilon\Psi} \;\approx\; -\varepsilon\, k^\mu \partial_\mu \Psi. \qquad \text{(Eikonal-1)}$$

En ausencia de gradientes ($\partial_\mu \Psi = 0$) recuperamos $k_\mu k^\mu = 0$ (luz en vacío, velocidad c). Las correcciones aparecen por la derivada direccional del fondo Ψ a lo largo del rayo.

2.3 Interpretación física y velocidad efectiva local

Para interpretar el efecto en velocidad de fase/grupo, es útil considerar primero el caso homogéneo ($\Psi = \Psi_0$) constante sobre la región experimental. Entonces $f = f_0 \equiv 1 + \varepsilon\Psi_0$ y la ecuación de eikonal da $f_0 k^2 = 0 \Rightarrow k^2 = 0$ — sin cambio de la cone structure.

Sin embargo, la normalización del campo significa que el acoplamiento efectivo del electrón y de la constante de estructura fina cambia: veremos eso en la sección 5.

Si $f_0 \neq 1$ y es homogéneo, una forma intuitiva: definimos la velocidad efectiva local (fase)

$$v_{\text{ph}} \approx \frac{1}{\sqrt{f_0}}.$$

Expansión para $|\varepsilon\Psi_0| \ll 1$:

$$v_{\text{eff}} \;=\; \frac{1}{\sqrt{1+\varepsilon\Psi_0}} \;\approx\; 1 - \tfrac{1}{2}\varepsilon\Psi_0 + \mathcal{O}(\varepsilon^2).$$

Pero este cambio uniforme no produce anisotropía entre dos brazos de un interferómetro si tanto el aparato como la luz que mide se escalan de la misma manera (véase inciso sobre acoplo universal). El efecto relevante para MM es la **variación espacial** de f, es decir $\nabla\Psi \neq 0$.

2.4 Estimación del efecto en un interferómetro (Michelson–Morley tipo)

Consideremos un interferómetro con dos brazos ortogonales de longitud L (trayectos ida-vuelta en cada brazo). La diferencia de tiempo de ida y vuelta para un brazo orientado en la dirección $\hat{u}$ es (aprox.):

$$t(\hat{u}) \;=\; 2\int_0^L \frac{dx}{v_{\text{eff}}(x)} \;\approx\; 2\int_0^L \left(1 + \tfrac{1}{2}\varepsilon\Psi(x)\right) dx,$$

donde en la última igualdad usamos la expansión $1/v_{\text{eff}} \approx 1 + \frac{1}{2}\varepsilon\Psi$.

Para un gradiente pequeño $\Psi(x) = \Psi_0 + (\hat{n}\cdot x)(\hat{n}\cdot\nabla\Psi)$ y tomando la diferencia entre dos brazos ortogonales ($\hat{u}_x$ y $\hat{u}_y$), la diferencia de tiempos es dominada por el término lineal en el gradiente:

$$\Delta t \equiv t(\hat{u}_x) - t(\hat{u}_y) \;\approx\; \varepsilon\,\tfrac{L^2}{2}\Big[(\hat{u}_x\cdot\nabla\Psi) - (\hat{u}_y\cdot\nabla\Psi)\Big].$$

Dividiendo por el tiempo de tránsito ($t \sim 2L$) para obtener la fracción relativa:

$$\frac{\Delta t}{t} \sim \frac{\varepsilon}{4}\,L\,\Big[(\hat{u}_x\cdot\nabla\Psi) - (\hat{u}_y\cdot\nabla\Psi)\Big] \sim \frac{\varepsilon}{4}\,L\,|\nabla\Psi|,$$

si las proyecciones son de orden $|\nabla\Psi|$. Esa fracción equivale aproximadamente a la fracción de anisotropía detectada en velocidad de la luz ($\Delta c/c \sim \Delta t/t$).

Tomando escala típica $L = 1$ m (experimentos de laboratorio) y sensibilidad experimental $\Delta c/c \lesssim 10^{-15}$, la **cota** es

$$\boxed{\varepsilon\,|\nabla\Psi| \;\lesssim\; 4\times10^{-15}\ \mathrm{m}^{-1}.} \qquad \text{(MM-bound)}$$

2.5 Cota mucho más fuerte desde la variación efectiva de la constante de estructura fina (relojes atómicos)

El prefactor $f(\Psi)$ en la Lagrangiana electromagnética altera la relación entre la carga eléctrica física y el campo: si

$$\mathcal{L}_{EM} = -\tfrac{1}{4}f(\Psi)F^2,$$

una re-normalización del potencial sugiere que la carga efectiva e_{eff} se escalaría aproximadamente como $e_{\text{eff}} \sim e/\sqrt{f(\Psi)}$.

Entonces la constante de estructura fina local α se transforma como

$$\alpha_{\text{eff}}(\Psi) \;=\; \frac{e_{\text{eff}}^2}{4\pi} \;\approx\; \frac{\alpha}{f(\Psi)} \;\approx\; \alpha\Big(1 - \varepsilon\Psi + \mathcal{O}(\varepsilon^2)\Big).$$

Por tanto, pequeñas variaciones $\delta\Psi$ inducen variaciones relativas de α:

$$\frac{\delta\alpha}{\alpha} \;\approx\; -\varepsilon\,\delta\Psi.$$

Comparaciones de relojes atómicos y medidas de α dan límites muy estrictos sobre variaciones espaciales/temporales de α. En laboratorios modernos y experimentos con relojes ópticos la sensibilidad en diferencias de frecuencia puede ser del orden 10^{-17} o mejor (en algunos casos 10^{-18}–10^{-19}).

Tomemos una referencia conservadora:

$$\left|\frac{\delta\alpha}{\alpha}\right| \lesssim 10^{-17} \quad\Rightarrow\quad |\varepsilon\,\delta\Psi| \lesssim 10^{-17}.$$

Si la variación espacial sobre el aparato es $\delta\Psi \sim L\,|\nabla\Psi|$ con $L \sim 1$ m, entonces

$$\boxed{\varepsilon\,|\nabla\Psi| \;\lesssim\; 10^{-17}\ \mathrm{m}^{-1}.} \qquad \text{(Clock-bound)}$$

Esta cota es **dos órdenes de magnitud más estricta** que la estimada por Michelson–Morley. Experimentos de laboratorio y comparaciones de relojes ópticos podrían empujar la cota aún más baja (10^{-18}–10^{-19} m^{-1}) en casos puntuales.

2.6 Interpretación numérica y ejemplo

- Si $\varepsilon \sim 1$ (acoplo fuerte), las cotas implican $|\nabla\Psi| \lesssim 10^{-17}$ m^{-1}. Eso significa que Ψ debe ser **extremadamente uniforme** a escala humana (variaciones de Ψ menores de 10^{-17} por metro).
- Si Ψ tiene gradientes naturales mayores (p. ej. $\nabla\Psi \sim 10^{-6}$ m^{-1}), entonces ε tendría que ser $\lesssim 10^{-11}$ para satisfacer relojes/α-limits.
- En otras palabras: **la combinación $\varepsilon\nabla\Psi$ es la que está fuertemente acotada, no necesariamente ε ni $\nabla\Psi$ por separado.**

2.7 Mapeo cualitativo a SME y coherencia con límites publicados

El SME (Standard-Model Extension) parametriza violaciones Lorentz mediante coeficientes que multiplican términos del tipo $k_F^{\mu\nu\rho\sigma} F_{\mu\nu}F_{\rho\sigma}$, $c_{\mu\nu}\bar{\psi}\gamma^\mu\partial^\nu\psi$, etc.

En la expansión alrededor de fondo Ψ_0,

- términos con $\partial_\mu\Psi_0$ generan, a primer orden, estructuras efectivas análogas a algunos componentes de k_F o $c_{\mu\nu}$ (dependiendo del acoplo).
- Los límites experimentales en los coeficientes SME del sector fotónico/campo eléctrico son extremadamente estrictos, típicamente $|k_F| \lesssim 10^{-17}$–10^{-20} en muchas componentes. Eso se traduce en cotas comparables sobre combinaciones de ε y $\partial\Psi_0$.

2.8 Conclusión

1. Con $f(\Psi) = 1 + \varepsilon\Psi$ la acción es manifiestamente Lorentz-invariante; la posible detección de "éter" depende exclusivamente de la **configuración de fondo** $\Psi_0(x)$ y de la **no-universalidad** del acoplo.
2. **Condición operativa para recuperar SR local:** si los acoplos son universales y la combinación $\varepsilon\,|\nabla\Psi|$ satisface la cota (Clock-bound) $\lesssim 10^{-17}$ m^{-1} (o más estricta según relojes usados), la física local será indistinguible de la de la relatividad especial con la precisión experimental actual.
3. **Cotas numéricas:** con $L \sim 1$ m,
   - Michelson–Morley $\to \varepsilon\,|\nabla\Psi| \lesssim 4 \times 10^{-15}$ m^{-1}.
   - Relojes atómicos / α-variations $\to \varepsilon\,|\nabla\Psi| \lesssim 10^{-17}$ m^{-1} (más estrictas posibles con relojes ópticos).
4. **Comentario:** estas cotas no imposibilitan la Cosmología del Quarkbase: permiten un campo Ψ no trivial siempre que sea suficientemente suave a escalas de laboratorio o bien que ε sea extremadamente pequeño. También abren la posibilidad de efectos cosmológicos o astrofísicos (variaciones a gran escala) que no se detecten localmente.

3 Mapeo de $f(\Psi) = 1+\varepsilon\Psi$ al lenguaje del SME (Standard-Model Extension)

- Si Ψ es estrictamente **constante** en la región considerada, la interacción $f(\Psi)F^2$ se reduce a una **re-normalización isotrópica** del término F^2 (equivalente a cambiar la definición de e o α) y **no** produce Lorentz-violation observables.
- Si Ψ tiene **dependencia espaciotemporal** (gradientes no nulos), aparecen efectos físicos adicionales que se pueden identificar con **coeficientes efectivos** del SME (en particular, con operadores no-mínimos o con cambios efectivos en el sector fotónico). Estos gradientes se pueden vincular con límites experimentales (p. ej. límites de variación de α por relojes atómicos y límites del SME en el sector fotónico).

A continuación se desarrollan estos principios.

3.1 Lagrangiano y elección concreta

Consideramos la pieza electromagnética del lagrangiano en presencia del acoplo escalar $\Psi(x)$:

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4} f(\Psi) F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + \mathcal{L}_{\Psi} + \mathcal{L}_{\text{sources}}, \qquad f(\Psi) = 1 + \varepsilon\Psi(x),$$

con ε adimensional (pequeño) y $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$. $\mathcal{L}_\Psi$ es el lagrangiano del campo escalar (por ejemplo, $\frac{1}{2}\partial_\mu\Psi\partial^\mu\Psi - V(\Psi)$).

Expandimos para $|\varepsilon\Psi| \ll 1$:

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} - \frac{\varepsilon}{4}\,\Psi(x)\,F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + \cdots$$

El término $-(\varepsilon/4)\Psi F^2$ es la pieza que introduce las modificaciones.

3.2 Ecuaciones de Maxwell modificadas y relación con α

Variando respecto a A_ν obtenemos (sin cargas libres externas, salvo cuando se indique):

$$\partial_\mu\Big(f(\Psi)F^{\mu\nu}\Big) = 0.$$

Expandimos a primer orden en ε:

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} + \varepsilon\,\partial_\mu\Big(\Psi F^{\mu\nu}\Big) = 0.$$

Se hace conveniente escribir la forma física en términos de una **constante electromagnética efectiva**. Si definimos localmente

$$\alpha_{\text{eff}}(x) \;\propto\; \frac{\alpha}{f(\Psi(x))} \quad \Rightarrow \quad \frac{\delta\alpha}{\alpha} \approx -\varepsilon\,\Psi(x) \quad \text{(a primer orden)},$$

porque F^2 aparece multiplicado por $f(\Psi)$: una variación de f equivale a una variación local de la constante de acoplamiento electromagnético. Por tanto:

$$\frac{\dot{\alpha}}{\alpha} \approx -\varepsilon\,\dot{\Psi}, \qquad \frac{\nabla\alpha}{\alpha} \approx -\varepsilon\,\nabla\Psi.$$

Consecuencia inmediata (vinculación con medidas experimentales): límites muy estrictos sobre $\dot{\alpha}/\alpha$ se traducen en límites sobre $\varepsilon\dot{\Psi}$.

Citación para límites experimentales de $\dot{\alpha}/\alpha$: medidas con relojes atómicos dan límites del orden $|\dot{\alpha}/\alpha| \lesssim 10^{-18}\,\mathrm{yr}^{-1}$ (ver trabajos de Rosenband et al. y análisis recientes). ([PubMed][1])

3.3 Sobre la invariancia de Lorentz y el SME

3.3.1 Caso $\Psi = \text{const}$ (vacío homogéneo)

Si $\Psi(x) = \Psi_0$ constante en la región considerada, entonces $f(\Psi)$ es constante y la termodinámica electromagnética se reduce a:

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}f(\Psi_0)F^2 = -\frac{1}{4}F'^2,$$

donde una simple re-normalización del campo/constante de carga absorbe $f(\Psi_0)$. **No** hay ruptura de simetría de Lorentz ni coeficientes SME físicos (lo único cambiado es la normalización, físicamente equivalente a un pequeño cambio en α). Por tanto:

- **No** aparece Lorentz-violation observacional si el fondo es constante.
- En SME esto corresponde a ausencia de coeficientes no nulos: no hay mapeo no–trivial al sector fotónico del SME salvo una re-definición de unidades.

3.3.2 Caso $\Psi(x)$ con gradiente no nulo: fuente de "background tensorial"

Si el fondo tiene una dependencia espaciotemporal suave $\Psi_0(x)$ con gradientes $\partial_\mu\Psi_0 \neq 0$, las ecuaciones de Maxwell escritas arriba contienen términos adicionales:

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} + \varepsilon(\partial_\mu\Psi_0)F^{\mu\nu} + \varepsilon\Psi_0\partial_\mu F^{\mu\nu} = 0.$$

A primer orden y en la aproximación de pequeños gradientes, el término relevante es:

$$\varepsilon(\partial_\mu\Psi_0)F^{\mu\nu}.$$

Ese término actúa **como una fuente efectiva** o como una modificación no-minimal del operador fotónico: introduce una dirección preferente $v_\mu \equiv \partial_\mu\Psi_0$. En la lógica del SME:

- Un **constante de fondo con componentes no nulas** (v_μ) juega el papel de un coeficiente efectivo que puede inducir **violación de Lorentz** observable (anisotropías, birefringencia, efectos de dispersión dependientes de dirección/velocidad, etc.).
- Según la clasificación del SME, los términos que involucran derivadas del campo escalar se corresponden con **coeficientes no-mínimos** en el sector fotónico (operadores de dimensión mayor a 4), o pueden inducir combinaciones de coeficientes en la parte CPT-par o CPT-impar del fotón.

En otras palabras: **gradientes de Ψ $\leftrightarrow$ coeficientes SME efectivos**.

Referencia general y compendio de límites del SME: Kostelecký & Russell, *Data Tables for Lorentz and CPT Violation* (actualización 2024). ([arXiv][2])

3.4 Mapeo operativo (fórmulas)

3.4.1 Variación de α — vínculo directo y límite numérico

$$\frac{\Delta\alpha}{\alpha} \approx -\varepsilon\,\Delta\Psi, \qquad \frac{\dot{\alpha}}{\alpha} \approx -\varepsilon\,\dot{\Psi}.$$

Tomando el límite experimental conservador:

$$\left|\frac{\dot{\alpha}}{\alpha}\right| \lesssim 10^{-18}\ \mathrm{yr}^{-1}.$$

De aquí:

$$|\varepsilon\,\dot{\Psi}| \lesssim 10^{-18}\ \mathrm{yr}^{-1}.$$

3.4.2 Mapeo a coeficientes SME del sector fotónico (cualitativo)

La forma canónica del término CPT-even del SME fotónico se escribe como

$$\mathcal{L}^{\mathrm{photon}}_{\mathrm{SME}} \supset -\frac{1}{4}(k_F)_{\kappa\lambda\mu\nu}F^{\kappa\lambda}F^{\mu\nu}.$$

Si $f(\Psi)$ fuese no-constante pero homogénea (dependencia temporal), el efecto sería isotrópico: reabsorbible. Pero con gradientes espaciales $\partial_\mu\Psi_0$, aparecen términos efectivos no-mínimos (operadores de dimensión > 4).

3.5 Estimación numérica ilustrativa

$$\frac{\dot{\alpha}}{\alpha} \approx -\varepsilon\,\dot{\Psi}, \quad |\varepsilon\,\dot{\Psi}| \lesssim 10^{-18}\ \mathrm{yr}^{-1}.$$

Ejemplo: si $\dot{\Psi} \sim H_0 \sim 7 \times 10^{-11}\ \mathrm{yr}^{-1}$, entonces

$$|\varepsilon| \lesssim \frac{10^{-18}}{7 \times 10^{-11}} \sim 1.4 \times 10^{-8}.$$

3.6 Conclusión

- Acoplo $f(\Psi) = 1 + \varepsilon\Psi$ deriva ecuaciones de Maxwell modificadas.
- Vínculo directo con α_{eff}: relojes atómicos limitan $\varepsilon\dot{\Psi}$. ([PubMed][1])
- Gradientes de Ψ se interpretan como coeficientes SME efectivos (sector fotónico). Tablas de Kostelecký & Russell dan las cotas. ([arXiv][2])

3.7 Referencias clave usadas

- V. A. Kostelecký & N. Russell — *Data Tables for Lorentz and CPT Violation.* ([arXiv][2])
- T. Rosenband et al. — frequency ratio $\mathrm{Al}^+/\mathrm{Hg}^+$ (optical clocks). ([PubMed][1])
- Revisiones recientes sobre acoplos escalares a F^2 y "varying alpha". ([par.nsf.gov][3])

4 Cierre de la demostración

4.1 Objetivo alcanzado

Demostrar (y cuantificar) cómo el acoplo

$$\mathcal{L} \supset -\tfrac{1}{4} f(\Psi) F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}, \quad f(\Psi) = 1 + \varepsilon\Psi$$

puede (i) ser formulado de forma lorentz-covárianta a nivel de acción, (ii) generar efectos observables equivalentes a coeficientes del **SME** cuando el fondo $\Psi(x)$ tiene gradientes, y (iii) cuáles son las **cotizaciones numéricas** que cierran la compatibilidad con experimentos actuales (variación de α, tests SME).

4.2 Covarianza del lagrangiano (acción) — paso preliminar

Escogemos el lagrangiano total (en unidades $\hbar = c = 1$):

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4} f(\Psi) F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} + \mathcal{L}_\Psi + \mathcal{L}_{\text{matter}}.$$

Si $\mathcal{L}_\Psi$ es covariante (por ejemplo $\frac{1}{2}\partial_\mu\Psi\partial^\mu\Psi - V(\Psi)$), la **acción es explícitamente Lorentz-covariante**: las formas tensoriales $(\partial_\mu\Psi\partial^\mu\Psi)$ y $(F_{\mu\nu}F^{\mu\nu})$ están escritas con índices contraídos por la métrica. $\Rightarrow$ **Conclusión 1:** el **formalismo** (acción) es compatible con relatividad en sentido teórico: no hay rotura explícita de simetría en la formulación Lagrangiana.

4.3 Ecuaciones de campo y aparición de un vector de fondo

Variando respecto A_ν obtenemos las ecuaciones modificadas:

$$\partial_\mu\Big(f(\Psi)F^{\mu\nu}\Big) = J^\nu_{\text{ext}}.$$

Escribiendo $f = 1 + \varepsilon\Psi$ y expandiendo a primer orden en ε (suponiendo $|\varepsilon\Psi| \ll 1$):

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} + \varepsilon\,\partial_\mu\Big(\Psi F^{\mu\nu}\Big) = J^\nu_{\text{ext}}.$$

Reordena:

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} + \varepsilon(\partial_\mu\Psi)F^{\mu\nu} + \varepsilon\Psi\,\partial_\mu F^{\mu\nu} = J^\nu_{\text{ext}}.$$

En la aproximación donde la variación multiplicativa $\varepsilon\Psi$ frente a $\partial_\mu\Psi$ es pequeña o tratamos términos lineales, el término relevante que **introduce una dirección preferente** es

$$\varepsilon(\partial_\mu\Psi)F^{\mu\nu}.$$

Definimos el **vector de fondo**:

$$v_\mu(x) \equiv \partial_\mu\Psi(x).$$

Entonces el término extra se escribe como $\varepsilon v_\mu F^{\mu\nu}$. Eso equivale a introducir en las ecuaciones de Maxwell una "corriente efectiva":

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} = J^\nu_{\text{ext}} - \varepsilon v_\mu F^{\mu\nu}.$$

Interpretación física: la presencia de v_μ (no nulo) selecciona una dirección en espacio-tiempo y, aun cuando la acción inicial sea covariante, **la solución de fondo** $\Psi_0(x)$ con $v_\mu \neq 0$ rompe efectivamente la invariancia de Lorentz de las soluciones observables. Eso es exactamente lo que codifica el SME: coeficientes de fondo que actúan como constantes tensoriales efectivas.

4.4 Mapeo cualitativo al SME (operador)

En el SME fotónico el término general CPT-even de dimensión 4 puede escribirse como:

$$\mathcal{L}_{\text{SME}} \supset -\tfrac{1}{4}(k_F)_{\kappa\lambda\mu\nu} F^{\kappa\lambda} F^{\mu\nu},$$

y hay operadores de mayor dimensión (non-minimal SME) con derivadas adicionales. Nuestro acoplo genera, tras reordenar las ecuaciones, términos que tienen la **misma física** que introducir un **fondo vectorial** v_μ multiplicando a F o a derivadas de F. Concretamente:

- Si v_μ es temporal dominante ($v_0 \neq 0$, $v_i \approx 0$), el efecto principal es una **renormalización isotrópica** de la constante electromagnética local (equivalente a cambiar α localmente).
- Si $v_i \neq 0$ (componentes espaciales), aparecen efectos anisótropos: birefringencia, dependencia direccional de la velocidad de la luz en el medio efectivo, modulación sideral en experimentos con orientación rotatoria, etc.

gradientes no nulos $v_\mu = \partial_\mu \Psi$ $\longrightarrow$ coeficientes SME efectivos (fotón, non-minimal y/o minimal).

$\Rightarrow$ **Conclusión 2:** el modelo se mapea al SME; por tanto los experimentos que limitan coeficientes SME ponen cotas directas a εv_μ.

(Referencias: tablas de datos del SME — Kostelecký & Russell — compilación de límites experimentales en el sector fotónico). [1]

4.5 Vínculo directo con la variación de la constante de estructura fina α

Una lectura muy directa del acoplo es verlo como una variación local de la normalización del término F^2. A primer orden:

$$\alpha_{\text{eff}}(x) \propto \frac{\alpha}{f(\Psi(x))} \quad \Rightarrow \quad \frac{\delta\alpha}{\alpha} \approx -\varepsilon\, \delta\Psi.$$

Derivando temporalmente:

$$\frac{\dot{\alpha}}{\alpha} \approx -\varepsilon\, \dot{\Psi}.$$

Los **límites experimentales** sobre $\dot{\alpha}/\alpha$ son extremadamente estrictos (mediciones de relojes atómicos y comparaciones de frecuencias). Tomamos un valor conservador representativo (literatura):

$$\left|\frac{\dot{\alpha}}{\alpha}\right| \lesssim 10^{-18}\ \mathrm{yr}^{-1}.$$

De aquí se obtiene la cota numérica directa:

$$\boxed{|\varepsilon\,\dot{\Psi}| \ \lesssim\ 10^{-18}\ \mathrm{yr}^{-1}.}$$

4.6 Ejemplos numéricos para demostración

Necesitamos fijar una escala para $\dot{\Psi}$ o para ε para extraer la otra. Dos hipótesis razonables y el límite resultante:

4.6.1 Caso A — hipótesis cosmológica suave

Si Ψ varía a escala cosmológica, $\dot{\Psi} \sim H_0$ (orden de magnitud), con $H_0 \approx 7 \times 10^{-11}\ \mathrm{yr}^{-1}$. Entonces

$$|\varepsilon| \lesssim \frac{10^{-18}}{7 \times 10^{-11}} \approx 1.4 \times 10^{-8}.$$

$\Rightarrow$ **Interpretación:** si $\dot{\Psi}$ es del orden de Hubble, ε debe ser $\lesssim 10^{-8}$ para cumplir límites atómicos.

4.6.2 Caso B — hipótesis microfísica fuerte

Si se prefiere $\varepsilon \sim 1$ por razones microfísicas, entonces

$$|\dot{\Psi}| \lesssim 10^{-18}\ \mathrm{yr}^{-1},$$

una variación **extremadamente lenta** (mucho menor que H_0).

4.7 Cierre formal: condiciones para reproducir la relatividad experimentalmente

Para que el modelo Quarkbase **reproduzca la relatividad** (i.e. no produzca señales Lorentz-violating por debajo de los límites experimentales actuales) es suficiente (cualquiera de las tres rutas o una combinación):

1. **Fondo local efectivo constante:** Ψ es estacionario (o de gradiente despreciable) en entornos locales relevantes (laboratorio, Tierra). Entonces los coeficientes SME efectivos son nulos localmente. (Mecanismo: potencial que empuja Ψ a un mínimo; screening.)

2. **Acoplo muy pequeño:** ε es tan pequeño que $\varepsilon\partial_\mu\Psi$ cae por debajo de límites (por ejemplo $\varepsilon \lesssim 10^{-8}$ si $\dot{\Psi} \sim H_0$).

3. **Mecanismos de screening ambiental:** Ψ tiene dinámica tipo "chameleon" o masa grande en ambientes densos, de modo que $\partial_\mu \Psi \approx 0$ localmente aunque sea activo a escalas cosmológicas.

Cualquiera de estas condiciones **cierra** la demostración: el lagrangiano es covariante, el origen de posibles violaciones queda identificado (gradientes), y hemos dado cotas concretas que hacen la teoría compatible con las medidas si se cumplen las condiciones anteriores.

4.8 Resultado final

1. La formulación con $f(\Psi) = 1 + \varepsilon\Psi$ es **covariante** a nivel de acción. **SÍ**

2. Los **efectos observables** de violación de Lorentz sólo aparecen si el **fondo** $\Psi_0(x)$ presenta **gradientes** (i.e. $\partial_\mu \Psi_0 \neq 0$); esos gradientes se mapean en coeficientes efectivos del SME (sector fotónico, incluyendo operadores non-minimal). **SÍ**

3. La **demostración queda cerrada** cuantitativamente: los experimentos que miden la variación de α y los tests SME imponen límites directos sobre la combinación $\varepsilon\partial_\mu\Psi$. Con el límite conservador $|\dot{\alpha}/\alpha| \lesssim 10^{-18}\,\mathrm{yr}^{-1}$ obtuvimos la cota numérica ilustrativa $|\varepsilon\,\dot{\Psi}| \lesssim 10^{-18}\,\mathrm{yr}^{-1}$; por ejemplo, si $\dot{\Psi} \sim H_0$ entonces $\varepsilon \lesssim 10^{-8}$. **SÍ**

Por tanto: **la teoría puede reproducir la relatividad especial en todos los experimentos relevantes** si y sólo si **la combinación** $\varepsilon\partial_\mu\Psi$ es suficientemente pequeña o está suprimida localmente por dinámica de campo (screening).

References

[1] V. A. Kostelecký & N. Russell, *Data Tables for Lorentz and CPT Violation*, actualización 2024, arXiv: https://arxiv.org/abs/hep-ph/0801.0287.